CHAPITRE 2 : FLUX DU CHAMP ELECTROSTATIQUE – THEOREME DE GAUSS

Le théorème de Gauss est un outil très utile permettant de calculer le champ électrostatique lorsque la distribution de charges présente un haut degré de symétrie. L'objectif est donc de :

- Comprendre la notion de flux d'un champ à travers une surface
- Connaitre le théorème de Gauss
- Savoir utiliser le théorème de Gauss pour la détermination du champ électrostatique dans quelques cas : sphère, cylindre ou plan chargé uniformément.

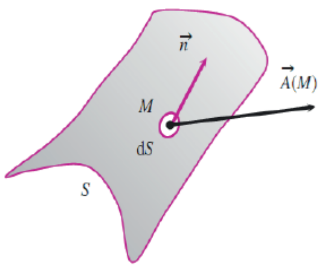
1. Flux du champ électrostatique

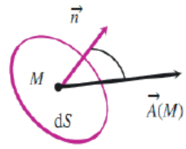
1.1. Flux d'un champ de vecteur $\vec{A}$

1.1.1. Flux élémentaire

Soit une surface élémentaire dS autour d'un point M orientée par son vecteur unitaire normal $\vec{n}$: $\overrightarrow{dS} = dS\vec{n}$ (vecteur surface élémentaire).

Le flux élémentaire noté $d\Phi$ du champ de vecteur $\vec{A}$ à travers la surface élémentaire dS autour du point M est par définition: $\boxed{d\Phi = \vec{A}(M).\overrightarrow{dS} = \vec{A}(M).\vec{n}dS}$

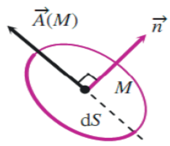




Si α est l'angle que fait la normale à la surface avec le vecteur champ ; $\alpha = (\vec{n}, \vec{A})$: $d\Phi = A(M).dscos\alpha$

Le flux est donc une valeur algébrique avec :

- ✓ $d\phi > 0$ si cosα > 0 ($\vec{A}(M)$ et $\vec{n}$ sont dirigés vers le même coté) : **le flux est dit sortant**
- ✓ $d\phi < 0$ si cosα < 0 ($\vec{A}(M)$ et $\vec{n}$ sont dirigés en sens inverse) : **le flux est dit entrant**
- ✓ $d\phi = 0$ si $\vec{A}(M)$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux (cosα = 0) c'est-à-dire que le vecteur $\vec{A}(M)$ est tangent à la surface (le champ ne traverse pas la surface)



1.1.2. Flux à travers une surface S

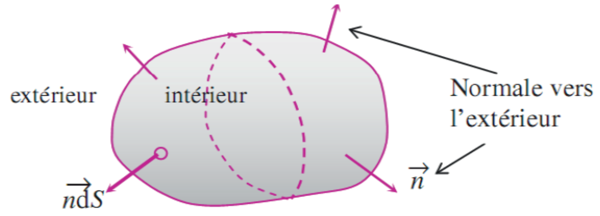
Le flux total ϕ du champ de vecteur $\vec{A}(M)$ s'obtient par intégration du flux élémentaire :

$$\Phi = \int_{surface} d\Phi \Longrightarrow \boxed{\Phi = \iint_{(S)} \vec{A}(M).\overrightarrow{dS}}$$

Cas du flux du champ électrostatique à travers une surface S : $\Phi = \iint_{(S)} \vec{E}(M).\overrightarrow{dS}$

1.1.3. Cas d'une surface fermée

Une surface fermée S délimite un volume fini de l'espace. On distingue alors 2 régions: l'intérieur de S et l'extérieur de S. Pour tout élément de volume on oriente le vecteur normal vers l'extérieur (sens positif). Le flux d'un champ de vecteurs à travers cette surface est un flux sortant.



$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} \ (cas\ du\ champ\ électrostatique)$$

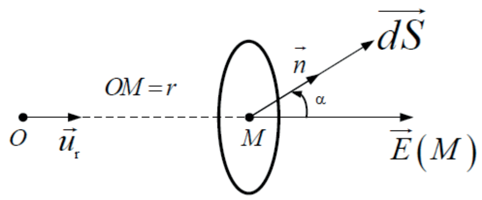
1.2. Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

1.2.1. Flux élémentaire

Une charge ponctuelle Q située en un point O de l'espace crée en un point M à la distance r de O le champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^2} \quad avec\ \vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

Le flux élémentaire du champ électrostatique à travers une surface élémentaire dS est :



$$d\Phi = \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = EdScos\alpha \Longrightarrow \boxed{d\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{cos\alpha}{r^2}dS}$$

- ✓ $d\Phi$ est maximal si cosα= 1 (α = 0) $\Longrightarrow d\Phi = EdS \Longrightarrow \vec{E}(M) \parallel \overrightarrow{dS}$ (ou $\vec{E}(M) \perp dS$)
- ✓ $d\Phi$ est nul si cosα = 0 ($\alpha = \pi/2$) $\Longrightarrow \vec{E}(M) \perp \overrightarrow{dS}$ (ou $\vec{E}(M) \parallel dS$)

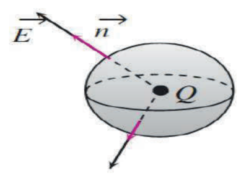
1.2.2. Flux total à travers une surface S

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} \Longrightarrow \boxed{\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)}\frac{cos\alpha}{r^2}dS}$$

Le flux du champ électrostatique correspond au débit de charge à travers la surface S.

a) Flux à travers une surface S fermée avec la charge Q à l'intérieur

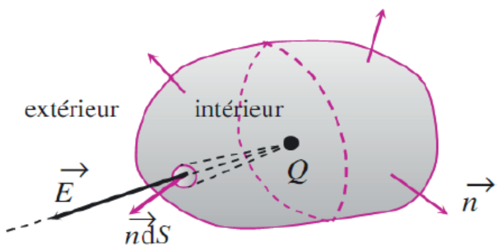
Considérons le cas de la surface d'une sphère de rayon r centrée sur la charge. Le champ électrostatique est alors radial et donc orthogonal à la surface en tout point de la sphère ($\vec{E}(M) \parallel \overrightarrow{dS}$). D'où :



$$d\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS}{r^2} \Longrightarrow \Phi = \oiint_{sphère}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oiint_{sphère} dS$$

$$\Longrightarrow \Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}S = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2 \quad \Longrightarrow \boxed{\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}}.$$

Ce résultat se généralise à une surface fermée quelconque contenant la charge Q :



Le flux sortant du champ électrostatique à travers une surface fermée est égal à la valeur de la charge qui en est la source divisée par la permittivité diélectrique du milieu où existe le champ : $\boxed{\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$

b) Flux à travers une surface S fermée avec la charge Q à l'extérieur

Le flux sortant du champ électrostatique à travers une surface fermée est nul si la charge qui drée le champ est à l'extérieur de cette surface : $\boxed{\Phi = 0}$

2. Théorème de Gauss

On montre que les résultats trouvés concernant le flux sortant du champ électrostatique à travers une surface fermée pour une charge ponctuelle se généralisent à une distribution quelconque de charges. D'où le théorème de Gauss.

2.1. Enoncé du théorème de Gauss

Le flux sortant du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface fermée S quelconque est égale à la somme des charges Q^{int} de la distribution créant le champ contenue dans cette surface divisé par ε_0 (cas du vide) :

$\boxed{\Phi_{sortant} = \oiint_{M\in(S)} \vec{E}(M).\vec{dS} = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0}}$. **La surface fermée choisie est appelée surface de Gauss**

2.2. Méthode d'application du théorème de Gauss

L'intérêt de ce théorème est de pouvoir déterminer le champ électrostatique en tout point M de l'espace créé par une distribution de charges connue. L'essentiel de ce théorème réside dans le choix de la surface fermée dite Surface de Gauss S_G qui passe par le point M et pour laquelle le calcul du flux du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est simple.

2.2.1. Critère de choix de la surface de Gauss

- ✓ La surface de Gauss peut être choisie de sorte que le champ électrostatique $\vec{E}$ soit perpendiculaire à S_G (surface de Gauss). Dans ce cas :

$$\vec{E}(M) \perp dS \Longrightarrow \vec{E}(M) \parallel \vec{dS} \Longrightarrow \vec{E}(M).\vec{dS} = E(M)dS$$

Si de plus la valeur du champ est constante en tout point de cette surface $E(M) = E$, on a :

$$\Phi_{sortant} = \oiint_{M\in(S_G)} \vec{E}(M).\vec{dS} = \oiint_{M\in(S_G)} E(M).dS = E\oiint_{M\in(S_G)} dS = ES_G = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \boxed{E = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0 S_G}}$$

- ✓ La surface de Gauss peut être choisie de sorte que le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ soit nul c'est-à-dire une surface qui contient le vecteur $\vec{E}$. Dans ce cas :

$$\vec{E}(M) \parallel dS \Longrightarrow \vec{E}(M) \perp \vec{dS} \Longrightarrow \vec{E}(M).\vec{dS} = 0$$

2.2.2. Méthodologie pour déterminer le champ et le potentiel électrostatique

- ✓ Inventaire des éléments de symétrie et des invariances du système de charges
- ✓ Déduction des lignes de champ et surfaces équipotentielles (voir topographie du champ au paragraphe suivant) c'est-à-dire avoir une idée de la direction du champ et des variables dont le module dépend

- ✓ Pour calculer le champ en un point donné, choisir une surface de Gauss fermée passant par ce point, qui se confond partiellement ou totalement avec une équipotentielle et pour laquelle le module de $\vec{E}$ est constant
- ✓ Déterminer l'expression mathématique du flux du champ électrostatique à travers la surface fermée de Gauss
- ✓ Appliquer le théorème de Gauss pour déduire le champ électrostatique $\vec{E}$
- ✓ Déduction du potentiel électrostatique.

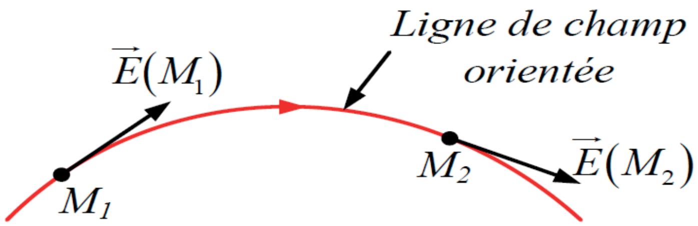
3. Topographie du champ électrostatique

Le champ électrostatique est un champ de vecteur pour lequel on définit les lignes de champ et les surfaces équipotentielles.

3.1. Lignes du champ et surfaces équipotentielles

3.1.1. Lignes de champ électrostatique

Une ligne de champ du champ électrostatique est une ligne tangente en tout point au vecteur champ électrostatique.



En chaque point le vecteur champ électrostatique est tangent à la ligne de champ.

L'ensemble des lignes de champ définit une cartographie (géométrie) du champ électrostatique.

- ➢ **Equation des lignes de champ**

En un point de la ligne de champ, $\vec{E}$ est colinéaire au déplacement élémentaire $\vec{dl}$:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} \wedge \vec{dl} = \vec{0}} \text{ en tout point } M \text{ de la ligne de champ}$$

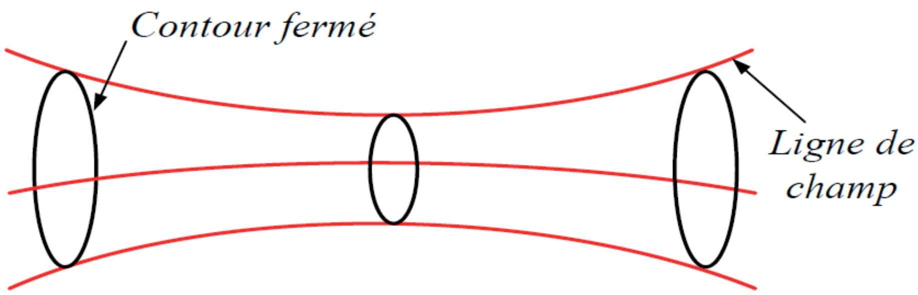
- ✓ se traduit en coordonnées cartésienne par :

$$\frac{dx}{E_x(x,y,z)} = \frac{dy}{E_y(x,y,z)} = \frac{dz}{E_z(x,y,z)}$$

Exemple : pour une charge ponctuelle Q, les lignes de champ sont des droites passant par le point où se trouve la charge.

3.1.2. Tube de champ

Un tube de champ est la surface engendrée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé.



3.1.3. Surface équipotentielle

Une surface équipotentielle est le lieu des points M situés à un même potentiel. Elle est donc définie par :

$$\boxed{V(M) = cte}$$

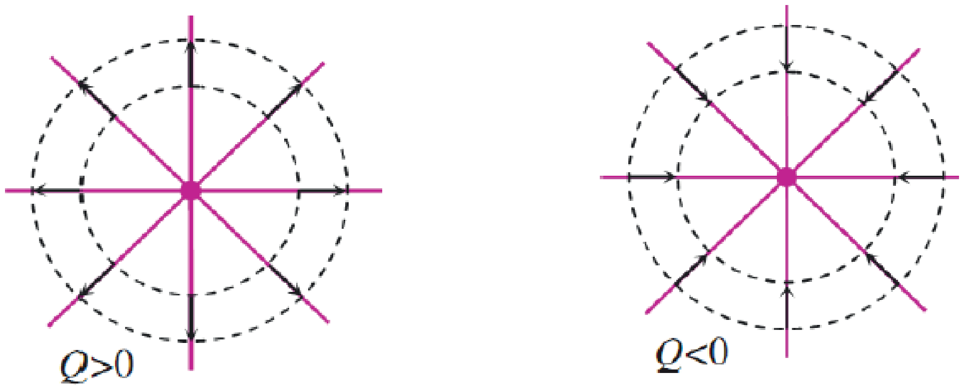
Exemple : dans le cas d'une charge ponctuelle : $V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = cte = V_0 \Longrightarrow r = cte = r_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 V_0}$.

C'est donc l'ensemble des points M situés à la distance r_0 du point où se trouve la charge Q : correspond à la sphère de rayon r_0 centré sur Q. On conclut que pour une charge ponctuelle, les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées sur la charge.

3.1.4. Diagramme électrique

C'est la figure sur laquelle sont représentées les lignes de champ et les surfaces équipotentielles pour une charge ou une distribution de charge.

Exemple : Diagramme électrique d'une charge ponctuelle Q :



Trait plein (rouge) : lignes de champ ; Trait en pointillé (noir) : surfaces équipotentielles

3.2. Propriétés des lignes de champ et des surfaces équipotentielles

3.2.1. Position relative des lignes de champ et des surfaces équipotentielles

Sur une surface équipotentielle S le potentiel électrostatique est constant. Pour 2 points M et N de S, $V(M) = V(N)$ d'où $\vec{E}.\overrightarrow{MN} = V(M) - V(N) = 0 \Longrightarrow \vec{E} \perp \overrightarrow{MN}$

On déduit que : le champ électrostatique est perpendiculaire à la surface équipotentielle en tout point de cette surface. Ainsi pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ sur une surface équipotentielle ($\overrightarrow{dl}$ est alors tangent à la surface équipotentielle) on a : $\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -dV = 0 \Longrightarrow \vec{E} \perp \overrightarrow{dl}$

Les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles.

Cette propriété permet de tracer les lignes de champ connaissant les équipotentielles et réciproquement.

3.2.2. Evolution du potentiel sur une ligne de champ

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow d\mathcal{C} = \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -dV$$

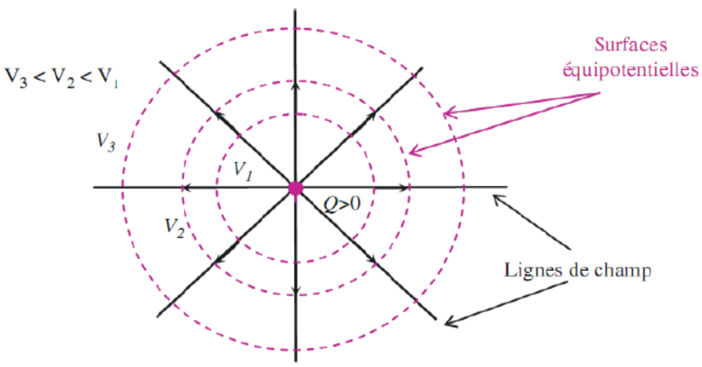
or $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dl}$ sont de même sens quand on se déplace le long d'une ligne de champ, dans le sens du champ électrostatique, $d\mathcal{C} = \vec{E}.\overrightarrow{dl} > 0$, donc dV < 0. D'où :

Le potentiel électrostatique décroit le long d'une ligne de champ électrostatique.

Les lignes de champ électrostatique sont donc orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Conséquence : les lignes de champ électrostatique ne seront jamais des courbes fermées.

Exemple : cas d'une charge ponctuelle Q>0 :



3.2.3. Convergence et divergence des lignes de champ

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow E(r) = -\frac{dV}{dr}\ si\ \vec{E}(M) = \vec{E}(r) \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}\ si\ V\ est\ extrémal$$

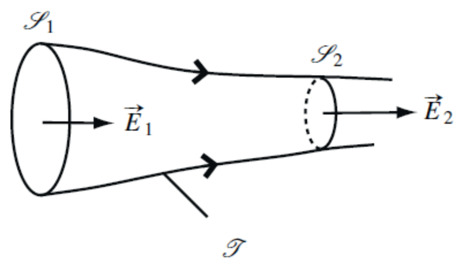
Or le potentiel électrostatique décroit le long d'une ligne de champ d'où :

- Si le potentiel est maximal en un point, les lignes de champ divergent de ce point.
- Si le potentiel est minimal en un point, les lignes de champ convergent vers ce point.

Conséquence : Le potentiel électrostatique n'a pas d'extremum dans une région vide de charge.

3.2.4. Evolution de la norme du champ électrostatique le long d'une ligne de champ

Considérons un tube de champ de surface S limité par deux surfaces planes S_1 et S_2 dans une région vide de charge. Le théorème de Gauss appliqué à la surface fermée $S = S_1 \cup S_2$ donne :



$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0} = 0\ (region\ vide\ de\ charge) \quad or$$

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_{S_1} \vec{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{S_l} \vec{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{S_2} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0$$

$\vec{E}$ est tangent à la surface latérale du tube $\Rightarrow \iint_{S_l} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0$ d'où :

$$\iint_{S_1} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = -\iint_{S_2} \vec{E}.\overrightarrow{dS}$$

En supposant que :

- ✓ $\vec{E}$ est orthogonal à S_1 et S_2
- ✓ S_1 et S_2 sont suffisamment petites pour que $\vec{E}$ soit uniforme sur chacune d'elle

alors :

$$\|\vec{E}_1\|S_1 = \|\vec{E}_2\|S_2 \Rightarrow \|\vec{E}_2\| = \frac{\|\vec{E}_1\|S_1}{S_2}$$

- Si $S_2 < S_1$ alors $\|\vec{E}_1\| < \|\vec{E}_2\|$
- Si $S_1 < S_2$ alors $\|\vec{E}_1\| > \|\vec{E}_2\|$

Dans une zone vide de charge, la norme du champ électrostatique augmente le long d'une ligne de champ dans la direction où les lignes de champ se resserrent et diminue le long d'une ligne de champ dans la direction où les lignes de champ s'écartent.

4. Application du théorème de Gauss : calcul du champ et potentiel électrostatique

4.1. Sphère uniformément chargée : cas de symétrie sphérique

La sphère chargée est de centre O et de rayon R portant une charge totale Q repartie uniformément en volume avec une densité volumique ρ_0.

4.1.1. Etude des symétries

La distribution de charges présente la symétrie sphérique (toute rotation autour du centre O de la sphère donne une répartition identique). Le champ et le potentiel s'expriment donc en coordonnées sphériques d'origine O:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\varphi$$

$$V(M) = V(r,\theta,\varphi)$$

- ✓ Pour tout point M de l'espace, la droite OM est un axe de symétrie (tout plan contenant la droite OM est plan de symétrie de la distribution de charges) donc le champ $\vec{E}(M)$ est porté par la droite OM : il est dit radial
- ✓ De plus il y a invariance de la distribution de charges par rotation des angles θ et φ autour de tout axe passant par O:

D'où :

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r} \text{ et } \boxed{V(M) = V(r)}$$

4.1.2. Calcul du champ : Application du théorème de Gauss

- ➢ **Choix de la surface de Gauss**

Le champ $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ radial est perpendiculaire à des surfaces sphériques centrées sur O et garde une norme constante sur ces sphères (r fixé, ces surfaces sont donc des surfaces équipotentielles). La surface de Gauss à prendre est donc la surface d'une sphère de centre O et de rayon $r = OM$ (sphère de Gauss) ; donc $M \in S_G$.

- ➢ **Expression du flux sortant à travers la surface de Gauss**

$$\overrightarrow{dS} = dS\vec{u}_r \text{ est colinéaire à } \vec{E}(r)$$

D'où le flux sortant du champ électrostatique $\vec{E}(r)$ à travers S_G est :

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_{S_G} \vec{E}(r).\overrightarrow{dS} = \iint_{S_G} E(r).dS = E(r)\iint_{S_G} dS = E(r)S_G$$

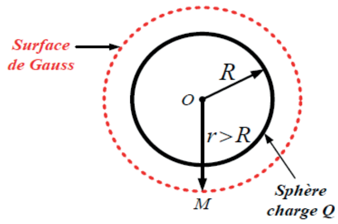
La surface de la sphère Gauss de rayon r est $S_G = 4\pi r^2$, il vient donc : $\boxed{\Phi_{\vec{E}} = 4\pi r^2 E(r)}$

➤ **Application du théorème de Gauss :** $\boxed{\Phi_{\vec{E}} = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 E(r) \Longrightarrow E(r) = \frac{Q^{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

➤ **Détermination de Q^{int} (charge à l'intérieur de la surface de Gauss)**

Cette charge va dépendre de la position du point M considéré. Deux cas sont possibles :

✓ le point M est à l'extérieur de la sphère chargée ($r > R$). La sphère de Gauss entoure complètement la sphère chargée. Q^{int} est la charge totale de la sphère chargée c'est-à-dire Q : $Q^{int} = Q$

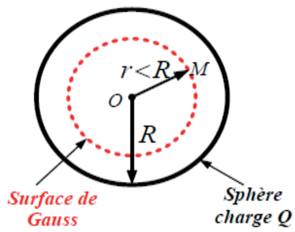


$avec\ \rho_0 = \frac{Q}{\mathcal{V}}$ où $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3 : volume\ \ de\ la\ sphère\ chargée \Longrightarrow$

$Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0 \Longrightarrow \boxed{Q^{int} = Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0}$

✓ le point M est à l'intérieur de la sphère chargée ($r < R$)

On calcule uniquement la charge qui se trouve dans la sphère de rayon r (sphère de Gauss) : $\boxed{Q^{int} = \rho_0\mathcal{V}_G = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_0 = Q\frac{r^3}{R^3}}$.



où $\mathcal{V}_G$: volume de la sphère de Gauss

➤ **Expression du champ électrostatique**

De l'application du théorème de Gauss on déduit E(r) suivant les deux cas :

- Si $r < R$ (M est à l'intérieur de la sphère chargée) : $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\vec{u}_r = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r\vec{u}_r}$
- Si $r > R$ (M est à l'extérieur de la sphère chargée) : $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\vec{u}_r}$
- Si $r = R$ (M est sur la sphère chargée) : $\boxed{E(R^-) = E(R^+) = E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R}$

Il y a continuité du champ électrostatique en $r = R$.

4.1.3. Calcul du potentiel électrostatique

Le potentiel ne dépendant que de r $V(M) = V(r)$ d'où:

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) \Longrightarrow E(r) = -\frac{dV}{dr} \Longrightarrow V(r) = -\int E(r)dr \Longrightarrow \begin{cases} \text{Pour r } < \text{R} : \ V(r) = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2 + V_1 \\ \text{Pour r} > \text{R} : \ V(r) = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} + V_2 \end{cases}$$

où V_1 et V_2 sont des constantes.

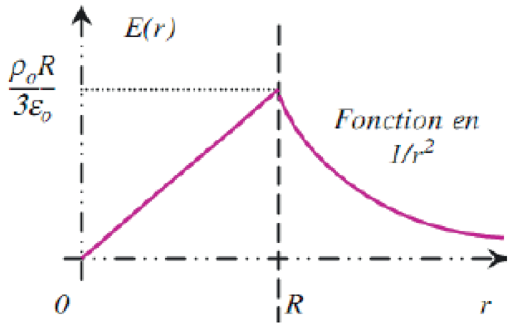
Les potentiels étant des primitives des champs sont toujours des fonctions continues.

La distribution de charges étant d'extension finie, le potentiel est pris nul à l'infini; permet de déterminer la constante V_2: $V(\infty) = 0 \Longrightarrow V_2 = 0$. La continuité du potentiel en $r = R$ permet de déterminer la constante V_1: $V(R^+) = \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0} = V(R^-) = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}R^2 + V_1 \Longrightarrow V_1 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$.

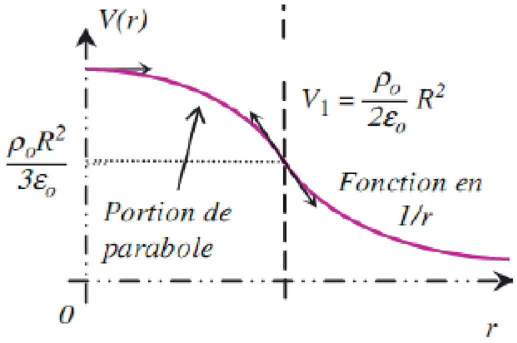
Finalement :

- Pour $r < R$ (M est à l'intérieur de la sphère chargée) : $\boxed{V(r) = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)}$.
- Pour $r > R$ (M est à l'extérieur de la sphère chargée) : $\boxed{V(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

4.1.4. Représentation graphique



Norme du champ électrostatique *E(r)*



Potentiel électrostatique *V(r)*

Remarques

- Les expressions du champ et du potentiel électrostatiques pour r > R sont les mêmes que celles du champ et du potentiel d'une charge ponctuelle Q placée en O. D'où :
  Pour une distribution à symétrie sphérique de centre O, une sphère de rayon R chargée de charge totale Q se comporte à l'extérieur de cette sphère (donc pour r > R) comme une charge ponctuelle Q placée en son contre O.
- Tout problème à symétrie sphérique se traite de la même manière. L'étude des symétries et des invariances et le choix de la surface de Gauss sont identiques. Ce qui change est le calcul de la charge intérieure à la surface de Gauss qui doit être adapté à chaque situation.

- **Exercice**

Déterminer le champ et le potentiel électrostatique pour une sphère de centre O et de rayon R portant une charge totale Q repartie uniformément en surface avec une densité surfacique σ_0 et montrer qu'il y a discontinuité du champ en $r = R$. Tracer les graphes *E(r)* et *V(r)*.

4.2. Cylindre uniformément chargé : cas de symétrie cylindrique

Le cylindre de rayon R considéré de longueur infinie (cylindre « infini ») et caractérisé par son axe de révolution $(z'z)$ est uniformément chargé en volume de densité volumique ρ_0.

4.2.1. Etude des symétries

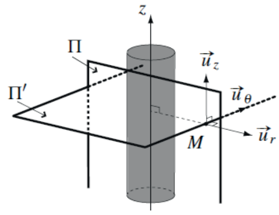
La distribution de charges présente la symétrie cylindrique (toute rotation autour de l'axe du cylindre et toute translation le long de cet axe donne une répartition identique). Le champ et le potentiel électrostatique s'expriment donc en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,z)\vec{u}_\theta + E_z(r,\theta,z)\vec{u}_z$$

$$V(M) = V(r,\theta,z)$$

Propriétés de symétrie :

- ✓ Pour tout point M de l'espace, les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ (le cylindre étant infini) sont des plans de symétrie de la distribution de charges donc le champ $\vec{E}(M)$ appartenant à ces deux plans est radial (est suivant $\vec{u}_r$)
- ✓ L'invariance de la distribution de charges par rotation d'angles θ autour de $z'z$ et par translation suivant z montre que $E(M)$ et $V(M)$ ne dépendent que de r :



D'où : $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r}$ et $\boxed{V(M) = V(r)}$

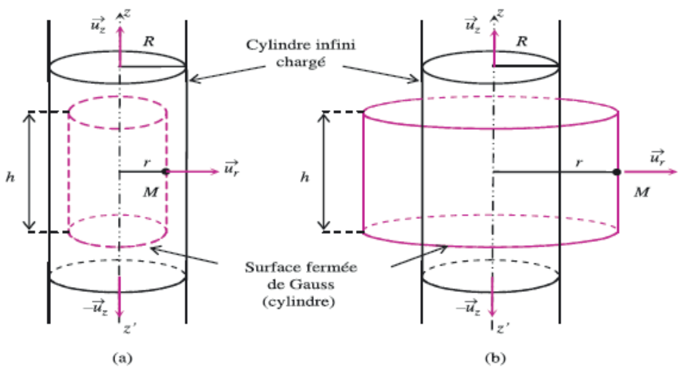
4.2.2. Calcul du champ : Application du théorème de Gauss

- **Choix de la surface de Gauss**

Le champ $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ radial est perpendiculaire aux surfaces cylindriques d'axe $(z'z)$ et garde une norme constante sur ces cylindres (r fixé) dont les surfaces sont donc des surfaces équipotentielles. La surface de Gauss S_G à prendre est donc la surface d'un cylindre d'axe $(z'z)$ et de rayon r (cylindre de Gauss) passant par M.

- **Expression du flux sortant à travers la surface de Gauss**

En considérant le cylindre de Gauss de hauteur h, la surface de Gauss se décompose en trois parties : la surface cylindrique latérale S_L, les surfaces de base supérieur S_{C1} et inferieur S_{C2}.



La surface latérale élémentaire, autour du point M s'écrit : $\overrightarrow{dS_L} = dS_L\vec{u}_r$

Pour la surfaces de base supérieur S_{C1} : $\overrightarrow{dS_1} = dS_1\vec{u}_z$

Pour la surfaces de base inferieur S_{C2} : $\overrightarrow{dS_2} = -dS_2\vec{u}_z$

Le flux sortant du champ électrostatique $\vec{E}(r)$ à travers la surface fermée S_G est :

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_{S_G} \vec{E}(r).\overrightarrow{dS} = \iint_{S_L} \vec{E}(r).\overrightarrow{dS_L} + \iint_{S_{C1}} \vec{E}(r).\overrightarrow{dS_1} + \iint_{S_{C2}} \vec{E}(r).\overrightarrow{dS_2}$$

$$\Rightarrow \Phi_{\vec{E}} = \iint_{S_L} E(r).dS_L + \underbrace{\iint_{S_{C1}} E(r)\vec{u}_r.dS_1\vec{u}_z}_{=0} + \underbrace{\iint_{S_{C2}} E(r)\vec{u}_r.dS_2\vec{u}_z}_{=0}.$$

Le flux du champ électrostatique à travers les surfaces de base est nul donc :

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_{S_L} E(r).dS_L = E(r)\iint_{S_L} dS_L = E(r)S_L.$$

La surface latérale du cylindre de Gauss est $S_L = 2\pi rh$, il vient donc : $\boxed{\Phi_{\vec{E}} = 2\pi rhE(r)}$

- **Application du théorème de Gauss :** $\boxed{\Phi_{\vec{E}} = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0} = 2\pi rhE(r) \Rightarrow E(r) = \frac{Q^{int}}{2\pi rh\varepsilon_0}}$

- **Détermination de Q^{int} (charge à l'intérieur de la surface de Gauss)**

Cette charge va dépendre de la position du point M considéré selon les deux cas possibles :

- ✓ le point M est à l'extérieur du cylindre chargé ($r > R$). Le cylindre de Gauss entoure le cylindre chargé (figure b). Q^{int} correspond à la charge Q située sur une hauteur h du cylindre infini chargé:

$$\boxed{\boldsymbol{Q^{int} = Q = \pi R^2 h\rho_0}}$$

- ✓ le point M est à l'intérieur du cylindre chargé ($r < R$). Le cylindre de Gauss est à l'intérieur du cylindre chargé (figure a). La charge se trouve dans le volume délimité par la surface de Gauss :
  $\boxed{\boldsymbol{Q^{int} = \rho_0 \mathcal{V}_G = \pi r^2 h\rho_0}}$ où $\mathcal{V}_G$: volume du cylindre de Gauss

➢ **Expression du champ électrostatique**

De l'application du théorème de Gauss on déduit E(r) :

- Si $r < R$ (M est à l'intérieur du cylindre chargé) : $E(r) = \frac{\pi r^2 h\rho_0}{2\pi r h\varepsilon_0} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r\vec{u}_r}}$
- Si $r > R$ (M est à l'extérieur u cylindre chargé) : $E(r) = \frac{\pi R^2 h\rho_0}{2\pi r h\varepsilon_0} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}\vec{u}_r}}$
- Si $r = R$ (M est sur le cylindre chargé) : $\boxed{\boldsymbol{E(R^-) = E(R^+) = E(R) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} R}}$

Il y a continuité du champ électrostatique en r = R.

4.2.3. Calcul du potentiel électrostatique

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) \Longrightarrow E(r) = -\frac{dV}{dr} \Longrightarrow V(r) = -\int E(r)dr$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{Pour r } < \text{R} : \ V(r) = -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^2 + V_1 \\ \text{Pour r} > \text{R} : \ V(r) = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} lnr + V_2 \end{cases} \quad où\ V_1\ et\ V_2\ sont\ des\ constantes$$

Du fait de l'existence de charges à l'infini (cylindre infini), il n'est pas possible de définir le potentiel à l'infini.

On doit faire un autre choix. Ce choix peut se faire entre trois hypothèses.

On peut choisir le potentiel nul :

- sur l'axe $V(r = 0) = 0$
- ou bien sur le cylindre $V(r = R) = 0$
- ou encore à une distance quelconque r_0 (spécifié) de telle sorte que $V(r = r_0) = 0$

D'autre part rappelons que le potentiel est une fonction continue.

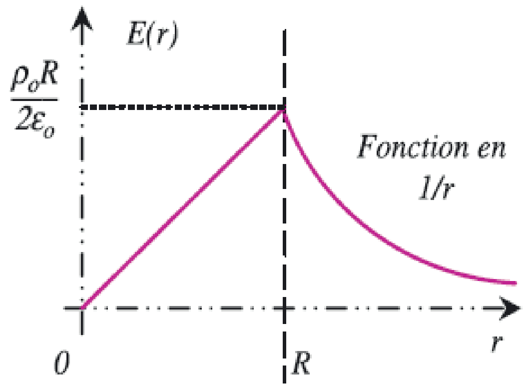
Prenons le potentiel nul sur le cylindre $V(R) = 0$ et continuité du potentiel en $r = R$ permet de déterminer les constantes V_1 et V_2 : $V(R) = 0 = V(R^-) = -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} R^2 + V_1 \Longrightarrow V_1 = \frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0}$

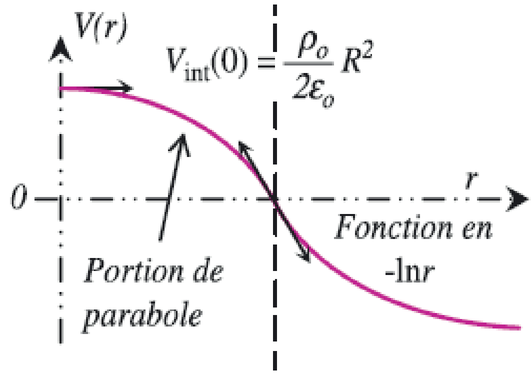
$$V(R) = 0 = V(R^+) = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} lnR + V_2 \Longrightarrow V_2 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} lnR$$

Finalement en prenant le potentiel nul sur le cylindre :

- Pour $r < R$ (M est à l'intérieur du cylindre chargé) : $\boxed{\boldsymbol{V(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}(R^2 - r^2)}}$
- Pour $r > R$ (M est à l'extérieur du cylindre chargé) : $\boxed{\boldsymbol{V(r) = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} ln\frac{r}{R}}}$

4.2.4. Représentation graphique





<u>Remarques</u>

- Tout problème à symétrie cylindrique se traite de la même manière. L'étude des symétries et des invariances et le choix de la surface de Gauss sont identiques. Ce qui change est le calcul de la charge intérieure à la surface de Gauss qui doit être adapté à chaque situation.

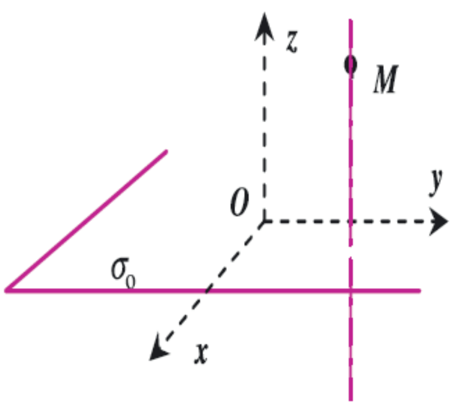
- **Exercice**

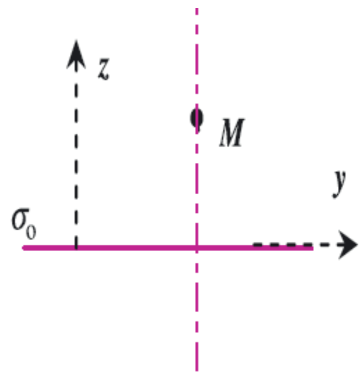
Déterminer le champ et le potentiel électrostatique d'un cylindre infini de rayon R caractérisé par son axe de révolution $(z'z)$ uniformément chargé en surface avec une densité surfacique σ_0 et montrer qu'il y a discontinuité du champ en $r = R$. Tracer les graphes *E(r)* et *V(r)*. On prendra le potentiel nul sur le cylindre.

4.3. Plan infini uniformément chargé : cas de symétrie plane

Le plan est chargé uniformément dans les directions parallèles à *(Ox)* et *(Oy)* avec une densité surfacique de charges σ_0. L'axe (Oz) est alors perpendiculaire à ce plan. Un point M quelconque peut être repéré en coordonnées cartésiennes. Une portion de plan de surface S porte ainsi une charge Q telle que :

$$Q = \sigma_0 S$$





4.3.1. Etude des symétries

La distribution de charges présente la symétrie plane étudiée au chapitre 1 :

- ✓ Il y a invariance de cette distribution par toute translation parallèlement à *(Ox)* et *(Oy)* donc : $\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(z)$ et $V(M) = V(x, y, z) = V(z)$
- ✓ En tout point M, les plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, $\vec{E}(M)$ est donc dans ces deux plans, il est porté par $\vec{u}_z$: $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_z$.

D'où : $\boxed{\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z}$ et $\boxed{V(M) = V(z)}$. D'autre part, le plan chargé (plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$) est lui-même un plan de symétrie pour la distribution de charges. Pour deux points $M(x, y, z)$ et $M'(x, y, -z)$ symétriques par rapport au plan chargé, $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$ et V(M') = V(M) d'où :

$E(-z) = -E(z)$: *la valeur du champ est une fonction impaire*

$V(-z) = V(z)$: *le potentiel est une fonction paire*

4.3.2. Calcul du champ : Application du théorème de Gauss

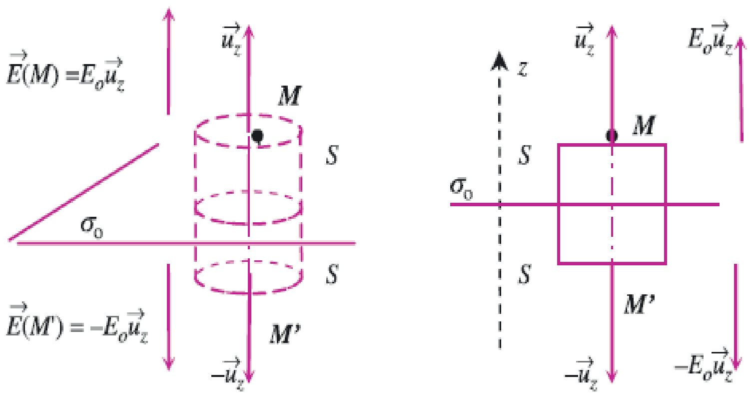
➢ **Choix de la surface de Gauss**

Les surfaces équipotentielles définies par V(z) = *cte* correspondent à l'ensemble des points pour lesquels z = *cte* c'est-à-dire des plans parallèles au plan chargé. Il est judicieux de choisir comme surface de Gauss, la surface du cylindre d'axe (Oz), de section S quelconque, situé entre les plans équipotentiels ; l'un passant par M (cote z avec z > 0) et l'autre passant par son symétriques par rapport au plan chargé M' (cote −z).

➢ **Expression du flux sortant à travers la surface de Gauss**

La surface de Gauss S_G se décompose en trois parties : la surface latérale S_L, les surfaces de base supérieure S_1 (passant M) et inférieure S_2 (passant par M') ; $S_1 = S_2 = S$. Le plan chargé coupe le cylindre de Gauss, la charge à l'intérieur de la surface de Gauss correspond à la charge située sur la surface d'aire S du plan chargé :

$\boldsymbol{Q^{int} = \sigma_0 S}$



Le flux sortant du champ électrostatique $\vec{E}(z)$ au point M à travers la surface fermée S_G est :

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_{S_G} \vec{E}(z).\vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{E}(z).\vec{dS}_1 + \underbrace{\iint_{S_L} \vec{E}(z).\vec{dS}_L}_{=0} + \iint_{S_2} \vec{E}(z).\vec{dS}_2$$

Le champ électrostatique étant tangent à S_L et uniforme sur S_1 et S_2 où z = cte.

$$\Rightarrow \Phi_{\vec{E}} = \iint_{S_1} E(z)\vec{u}_z.dS_1\vec{u}_z + \iint_{S_2} (-E(z)\vec{u}_z).(-dS_2\vec{u}_z) \Rightarrow \Phi_{\vec{E}} = E(z)S_1 + E(z)S_2 = 2E(z)S$$

$\boxed{\boldsymbol{\Phi_{\vec{E}} = 2E(z)S}}$.

➢ **Application du théorème de Gauss :**

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0} = 2E(z)S \Rightarrow E(z) = \frac{Q^{int}}{2S\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0 S}{2S\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}}.$$

➢ **Expression du champ électrostatique**

L'expression de $E(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ trouvée est donnée pour le point M c'est-à-dire pour z > 0. En appliquant la propriété d'imparité du champ, $E(z) = -E(-z)$ on a finalement :

- Pour z > 0: $\boxed{\vec{E}(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z}$, Pour z < 0: $\boxed{\vec{E}(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z}$

On peut résumer ces résultats par la formule générale pour tout point M :

$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{n}}$ *où $\vec{n}$ est la normale au plan orienté du plan vers M.*

On constate une discontinuité du champ électrostatique à la traversée du plan chargé: $\vec{E}(z > 0) - \vec{E}(z < 0) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$

Remarques

- Ce résultat est général, pour une distribution surfacique il y a discontinuité du champ électrostatique à la traversée de la surface chargée.
- Du fait de la discontinuité du champ électrostatique à la traversée d'une surface chargée, il n'est pas défini en z = 0. Le champ varie de $-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ à $\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ sur une faible épaisseur $2z_0$

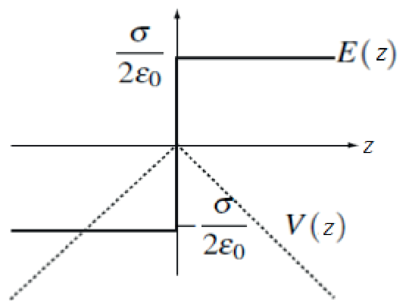
4.3.3. Calcul du potentiel électrostatique

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) \Longrightarrow E(z) = -\frac{dV}{dz} \Longrightarrow V(z) = -\int E(z)dz$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{Pour z } < 0: \; V(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z + V_1 \\ \text{Pour z } > 0: \; V(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z + V_2 \end{cases} \quad où\ V_1\ et\ V_2\ sont\ des\ constantes$$

La continuité du potentiel en $z = 0$ impose $V_1 = V_2 = V_0$:

- Pour z < 0: $\boxed{V(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z + V_0}$
- Pour z > 0 : $\boxed{V(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z + V_0}$



Le potentiel étant une fonction paire $V(z) = V(-z)\ \forall\, z\ d'où$

$\boxed{\forall z,\; V(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}|z| + V_0}$

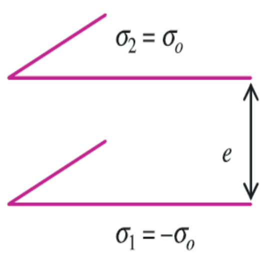
4.3.4. Représentation graphique

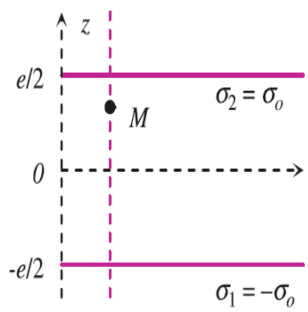
En prenant le potentiel nul à z = 0, on a la figure ci-contre.

4.4. Condensateur plan

Etude du condensateur plan comme la superposition de deux plans identiques parallèles de distributions surfaciques mais portant des charges opposées.

4.4.1. Définition du condensateur plan





Un condensateur plan est un condensateur constitué de deux armatures formées par deux conducteurs plans, parallèles, et identiques de surface S, espacées d'une distance e supposée très faible devant les dimensions des conducteurs et portant des charges opposées. Les conducteurs sont donc considérés comme « infinis » et on néglige alors les effets de bord (modèle du condensateur plan idéal). L'état électrique ne dépend ainsi que d'une coordonnée le long d'un axe perpendiculaire aux conducteurs plans et les densités surfaciques peuvent être considérées comme uniformes.

Soit les plans (P_1) et (P_2) (les armatures du condensateur) perpendiculaires à un axe $(z'z)$ et respectivement repérées par leur côte $z_1 = -\frac{e}{2}$ et $z_2 = \frac{e}{2}$ et dont la densité surfacique de charges est $\sigma_1 = -\sigma_0$ et $\sigma_2 = \sigma_0$ (en supposant $\sigma_0 > 0$). Le plan (P_2) porte la charge totale

$Q = \sigma_0 S$ et le plan (P_1) la charge $-Q$.

4.4.2. Calcul du champ électrostatique

Pour calculer le champ électrostatique, on utilise le principe de superposition : le champ résultant est la somme des champs créés par chacun des plans :

- ✓ Champ électrostatique créé par (P_1)
  - Pour $z < -\frac{e}{2}$, $\vec{E}_1 = \vec{E}_1^- = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$
  - Pour $z > -\frac{e}{2}$, $\vec{E}_1 = \vec{E}_1^+ = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$
- ✓ Champ électrostatique créé par (P_2)
  - Pour $z < \frac{e}{2}$, $\vec{E}_2 = \vec{E}_2^- = -\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$
  - Pour $z > \frac{e}{2}$, $\vec{E}_2 = \vec{E}_2^+ = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$
- ✓ Superposition des deux champs
  - Pour $z < -\frac{e}{2} < \frac{e}{2}$, $\vec{E} = \vec{E}_1^- + \vec{E}_2^- = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z - \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z = \vec{0}$
  - Pour $-\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}$, $\vec{E} = \vec{E}_1^+ + \vec{E}_2^- = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z - \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$
  - Pour $z > \frac{e}{2} > -\frac{e}{2}$, $\vec{E} = \vec{E}_1^+ + \vec{E}_2^+ = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z + \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z = \vec{0}$

  D'où : $\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} \quad pour\ z < -\frac{e}{2} \quad et\ pour\ z > \frac{e}{2} \\ -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\vec{u}_z \quad pour\ -\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2} \end{cases}$

En résumé, le champ électrostatique créé par le condensateur plan est : $\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} \quad si\ |z| > \frac{e}{2} \\ -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\vec{u}_z \quad si\ |z| < \frac{e}{2} \end{cases}}$

Le champ est nul en dehors des plans et uniforme entre les deux plans.

4.4.3. Calcul du potentiel électrostatique

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) \Rightarrow E(z) = -\frac{dV}{dz}$$

- ➢ Pour un point M entre les 2 plans $(-\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}) \Rightarrow \frac{dV}{dz} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow V(z) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}z + V_0$

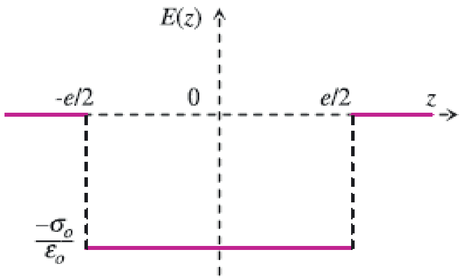
En prenant le potentiel nul pour $z = 0 \Rightarrow V_0 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{V(z) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}z}$

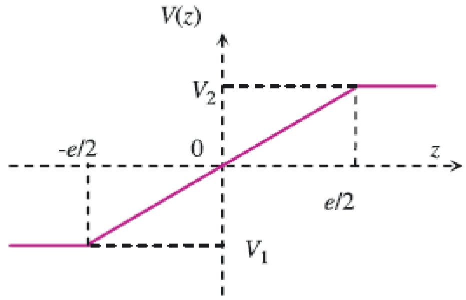
- ➢ Pour un point M en dehors des plans pour $z < -\frac{e}{2}$, $dV(M) = 0 \Rightarrow V(z) = cte = V_1$
- ➢ Pour un point M en dehors des plans pour $z > \frac{e}{2}$, $dV(M) = 0 \Rightarrow V(z) = cte = V_2$

Les constantes V_1 et V_2 se déterminent par continuité du potentiel et correspondent donc respectivement au potentiel des plans (P_1) et (P_2) : $V(z_1) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} z_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(-\frac{e}{2}\right) = V_1 \Longrightarrow V_1 = -\frac{\sigma_0 e}{2\varepsilon_0}$

$$V(z_2) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} z_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{e}{2}\right) = V_2 \Longrightarrow V_2 = \frac{\sigma_0 e}{2\varepsilon_0}$$

4.4.4. Représentation graphique





4.4.5. Différence de potentiel et capacité du condensateur plan

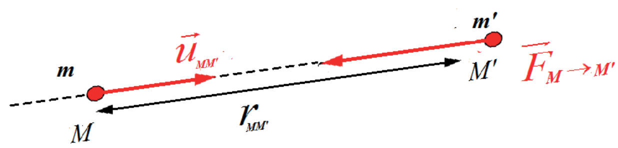
- La différence de potentiel U (ou tension électrique) entre les armatures s'écrit :

$$\boxed{U = V_2 - V_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e = \|\vec{E}\| e},\ or\quad \sigma_0 = \frac{Q}{S} \Longrightarrow \boxed{U = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S}}$$

- La capacité C du condensateur est telle que : $Q = CU \Longrightarrow C = \frac{Q}{U} \Longrightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$

5. Analogie avec le cas de la gravitation

5.1. Force de gravitation



Deux masses ponctuelles m et m' situées respectivement aux points M et M' s'attirent mutuellement. Entre ces deux masses, il s'exerce une force attractive appelée force de gravitation (interaction gravitationnelle) donnée par la loi de Newton analogue à la loi de Coulomb : $\vec{F}_{M\to M'} = -\mathcal{G}\frac{mm'}{MM'^2}\vec{u}_{MM'} = -\mathcal{G}mm'\frac{\overrightarrow{MM'}}{MM'^3}$ soit

$$\boxed{\vec{F}_{M\to M'} = -\mathcal{G}\frac{mm'}{r^2}\vec{u}_r = -\mathcal{G}mm'\frac{\vec{r}}{r^3}},\ Avec\ \vec{r} = \overrightarrow{MM'}\ et\ \vec{u}_r = \vec{u}_{MM'} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{MM'}$$

$\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6{,}6710^{11}\ N.m^2.kg^2$.

D'où l'analogie suivante :

Gravitation	**Electrostatique**
masse m	charge électrique q
force de gravitation $\vec{F}_{m\to m'} = -\mathcal{G}mm'\frac{\vec{r}}{r^3}$	force électrostatique $\vec{F}_{q\to q'} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}qq'\frac{\vec{r}}{r^3}$
$-\mathcal{G}$ $(-4\pi\mathcal{G})$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ $\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)$

<u>Remarque</u> : Les masses contrairement aux charges électriques sont toujours positives, la force gravitationnelle est donc une force toujours attractive.

5.2. Champ de gravitation

5.2.1. Champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle

La force gravitationnelle subie par une masse ponctuelle m' au point M de la part d'une masse ponctuelle m placée au point O à une distance $r = OM$ est : $\vec{F}_g = -\mathcal{G}\frac{mm'}{r^2}\vec{u}_r = m'\left(-\mathcal{G}\frac{m}{r^2}\vec{u}_r\right) = m'\vec{G}(M)$

où $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$ avec: $\boxed{\vec{G}(M) = -\mathcal{G}\frac{m}{r^2}\vec{u}_r = -\mathcal{G}m\frac{\vec{r}}{r^3}}$

$\vec{G}(M)$ est le champ gravitationnel créé en M par la masse ponctuelle m située en O.

5.2.2. Champ gravitationnel créé par une distribution de masses

Par application du principe de superposition comme dans le cas du champ électrostatique :

- ✓ Pour une distribution discrète de N masses ponctuelles : $\vec{G}(M) = \sum_{i=1}^{N}\vec{G}_i(M) = -\mathcal{G}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{r_i^2}\vec{u}_{r_i}$
- ✓ Pour une distribution volumique de masses : $\vec{G}(M) = \iiint_{(\mathcal{V})} d\vec{G}(M) = -\mathcal{G}\iiint_{(\mathcal{V})}\rho(M)\frac{\vec{r}}{r^2}d\mathcal{V}$
  où $\rho(M)$: masse volumique.
- ✓ Pour une distribution surfacique de masses : $\vec{G}(M) = -\mathcal{G}\iint_{(S)}\sigma(M)\frac{\vec{r}}{r^2}dS$, $\sigma(M)$: masse surfacique.
- ✓ Pour une distribution linéique de masses : $\vec{G}(M) = -\mathcal{G}\int_{(L)}\lambda(M)\frac{\vec{r}}{r^2}dl$, $\lambda(M)$: masse linéique.

5.3. Théorème de Gauss pour la gravitation

Par analogie avec le cas électrostatique : $\Phi_{\vec{E}} = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0}$, le théorème de Gauss pour la gravitation s'écrit : $\boxed{\Phi_{\vec{G}} = \oiint_{(S)}\vec{G}.\overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}M^{int}}$ où $\Phi_{\vec{G}}$ est le flux sortant du champ gravitationnel à travers une surface fermée et M^{int} la masse contenue à l'intérieur de cette surface.

<u>Remarques</u>

- ➢ Dans le théorème de Gauss pour la gravitation on a un signe $-$.
- ➢ Les propriétés de symétries du champ de gravitation sont les mêmes que celles du champ électrostatique mais comme les masses négatives n'existent pas, il n'y a jamais de plan d'antisymétrie des sources dans le cas de la gravitation.